**ממן 16**

**מגיש: בוצ'קובסקי מיכאל**

**ת.ז: 317035038**

על מנת לממש את האלגוריתם הנדרש במטלה נשתמש בעץ אדום שחור עם שדה size, ושלוש מערכים שישמשו כקלט המסמלץ קבלת נתונים אונליין.

עץ א"ש יהיה מוגבל בגודלו לגודל K אשר מציין את מספר האיברים הכי קטנים בקלט עד לרגע הבדיקה.

רעיון האלגוריתם: בכל רגע נתון האלגוריתם שומר רק את K האיברים הקטנים ביותר שבחן עד לנקודות הבדיקה n1,n2,n3,n במערך. הכנסת האיברים תבוצע באופן הבא: אם עץ א"ש מכיל פחות מ-K איברים, כלומר ערך ה- size של העץ קטן מ-K, האיבר בעל מפתח X יכנס לעץ א"ש במקום אשר נקבע בהתאם לערך ה-X ותכונת עח"ב. אם עץ א"ש מכיל K איברים, size=K, האיבר בעל מפתח X יכנס רק במקרה בו X קטן מהאיבר המקסימלי בעץ א"ש. אם מצב זה מתקיים, נוציא מעץ הא"ש את האיבר המקסימלי ובמקומו נכניס את האיבר בעל מפתח X.

על מנת להחזיר את K האיברים בסדר ממוין נבצע סריקה תוכית על עץ א"ש. וכדי לעמוד בדרישה של סיבוכיות זמן לקבלת פלט ממוין, נשתמש בתכונת סריקה תוכית (עמוד 214 בספר) ובמשפט 12.1 בע"מ 215 האומר כי סריקה תוכית של עח"ב רצה ב Ɵ(n) כאשר n זהו מספר צמתים בעץ. ואילו במקרה שלנו זמן ריצה של סריקה תוכית הינו Ɵ(k).

תחזוקת שדה ה-size מבוצעת כמתואר בספר בעמוד 253-257.

פסאודוקוד:

**K\_smallest\_Elements (Array,K,checkTime)**

1. Initialize Red-Black Tree RBT of size K
2. X<-root[RBT]
3. For i<-1 upto length[Array]
4. If i=length[Array]/4 then
5. PrintKmin(RBT,A,1/4) //print K smallest elements
6. If i=length[Array]/2 then
7. PrintKmin(RBT,A,1/2) //print K smallest elements
8. If i=3/4\*length[Array] then
9. PrintKmin(RBT,A,3/4) //print K smallest elements
10. If size[X] < K then
11. RB-Insert(RBT,Array[i]) //as described on page 236
12. Else If size[X]=K then
13. If Array[i] < max[X] then
14. RB-Delete(RBT,[max[X]])//as described on page242
15. RB-Insert(RBT,Array[i])

16. PrintKmin(RBT,A,1) //print K smallest elements

17. For i<- upto length[A] //Print whole input array

18. Print Array[i]

**PrintKmin(RB-Tree,Array,n)**

1. Print -> “After n\*Array.length inputs the K smallest elements are:”
2. Inorder traversal over RB-Tree //as described on page 214

נקרא ל פונקציה Find\_K\_Smallest\_Values באופן הבא:

**K\_smallest\_Elements (Array,K,N)**

כאשר Array מקבל את מערך הקלט, K זהו מספר האיברים שנדרשים למצוא, ו-N זאת נק' בדיקה הנדרשת שיכולה לקבל אחד מבין 4 ערכים הבאים: 1/4 ממגודל הקלט, 1/2 מגודל הקלט, ¾ מגודל הקלט או כגודל הקלט.

בכל איטרציה ה-i-ית עץ א"ש מכיל לכל היותר K איברים הכי קטנים של הקלט.

עבור i=0, הטענה מתקיימת באופן ריק.

עבור i<=K, מספר האיברים בעץ קטן מ-K, size<k, לכן התנאי בשורה 10 מתקיים, וערך Array[i] יכנס לעץ א"ש וימוקם במקום אשר יקבע על פי תכונת ע"חב ואלגוריתם הכנסה כפי שהוא מתואר בעמוד 236 בספר.

עבור i=K, יתקיים התנאי בשורה 12, size<k, אם הערך של Array[i] קטן מערך המקסימלי אשר נמצא בעץ, אזי קיים בקלט איבר בעל ערך מפתח קטן יותר ממפתח בעל ערך מקסימלי הקיים בעץ א"ש, Array[i]<max[X]. על-מנת ששמורת לולאה תשמר נוציא את האיבר המקסימלי ונכניס במקומו את Array[i]. וזאת כי עץ א"ש מקיים את תכונת עח"ב, וכתוצאה מכך כל איבר אשר נמצא בעץ א"ש קטן מ- n-k איברי הקלט. אחרת, אין בקלט איבר הקטן יותר מאחד הערכים אשר נמצאים בעץ א"ש ולכן עץ א"ש מכיל את K האיברים הכי קטנים אשר נקלטו עד כה.

עבור i=n, מכיוון שעברנו על כל הערכים הקיימים במערך הקלט, ומקיום תנאי שורות 12 ו-10 עץ הא"ש מכיל את K האיברים הקטנים ביותר של מערך הקלט.

ניתוח סיבוכיות:

הכנסה לעץ א"ש מתבצעת ב O(lg k), מאחר שגובהו של עץ אדום שחור בעל K צמתים הוא O(lg k) (עמוד 241 בספר). יחד עם זאת, יתכן מצב שבו כחלק מהכנסה נצטרך למחוק את אחד הצמתים. שגרת המחיקה רצה בזמן O(lg k) , (עמוד 246 בספר). לכן אם אנו לא נדרשים למחוק צומת, פעולת הכנסה דורשת O(lg k) שכן העץ הוא עץ א"ש וגובהו הוא לוגריתמי למספר צמתיו, ואילו אם נדרש למחוק צומת (שורה 9) נבצע מחיקה בעלות O(lg k) והכנסה גם בעלות של O(lg k) . במהלך הלולאה אנו מתחילים משורש העץ, ובכל פעם ממשיכים לבן השמאלי או הימני, או שאם הגענו למיקום המתאים של המפתח בעץ אנחנו מפסיקים את הריצה. במקרה הגרוע נרוץ על כל גובה העץ. לכן פעולת הכנסה לוקחת Ɵ(lg k) .

סריקה תוכית של עץ, בהתאם לעמוד 214 בספר ומשפט 12.1 בע"מ 215 לוקחת (k)Ɵ כי עץ מכיל לא יותר מ-K צמתים.

הקלט עבור המקרה הגרוע הינו קלט אשר ממוין בסדר יורד. על כן, יבוצעו n הכנסות, כגודל הקלט, לעץ א"ש, בהתאם לתנאי בשורה 13. לכן במקרה זה זמן הינו O (nlg k) . אם הקלט הוא רנדומלי, ההכנסות יבוצעו רק במקרה ובו מתקיים תנאי שורה 13, לכן אם גודל מערך הינו n, הזמן הוא זמן ריצת הלולאה והדפסה של K אלמנטים הכי קטנים, O(k+nlgk)=O(nlgk),לכן זמן ריצה של האלגוריתם הינו Ɵ(nlg k).

מכיוון שעץ א"ש, שבאמצעותו מומש האלגוריתם, בעל שדה מידע size אשר משמש לבקרת כמות הצמתים בעץ, ניתן להגביל את גודל העץ בדיוק לערך שאנו מעוניינים בו. ניתן לעשות זאת ע"י קביעת ערך K. לכן כאשר גודל מערך הקלט מקיים את דרישות השאלה, k<n, מקום הנדרש לאלגוריתם הינו כגודל העץ. זאת אומרת (k)Ɵ , כי עץ א"ש אשר אלגוריתם משתמש בו לא יכיל יותר מ-K צמתים בהתאם לשורות 6 ו 4.

אציג כעת כמה דוגמאות של ריצת האלגוריתם.

עבור מערך הקלט בגודל 200 ו K=10, לאחר דגימת 50 ערכי קלט נקבל פלט ממוין הבא:

**The value of K is: 10**

**After 50 inputs:**

**The 10 smallest numbers are:**

48 52 53 58 60 120 128 160 171 172

כאשר קלט עד לנקודת בדיקה זו הוא:

**The Array is:**

921 500 497 260 634 817 128 939 58 191 667 52 986 588 352 495 277 60 422 636 752 429 345 356 837 762 171 711 323 593 822 669 160 48 53 952 530 482 172 392 944 120 924 429 241 846 631 620 583 458

ניתן לראות כי עד האיבר ה-10 של מערך הקלט כל האיברים נכנסים למערך, והחל מאיבר ה-11, האיבר אשר יכנס הוא איבר אשר ערך מפתחו קטן מערך מקסימלי שקיים בעץ לעת הכנסתו של איבר זה. לכן, אם נסתכל על הפלט נראה כי איבר 939 כבר לא נמצא בפלט כי היננו גדול יותר מ 172. באופן דומה איבר 921 גם לא נמצא בפלט. ובאופן דומה אם נחפש את 10 האיברים בעלי מתפחות הכי קטנים נראה שרק הם מופיעים בפלט באופן ממוין, ואין אף איבר בעל ערך המפתח גדול יותר.

עבור מערך הקלט בגודל 200 ו K=10, לאחר דגימת 100 ערכי קלט נקבל פלט ממוין הבא:

**After 100 inputs:**

**The 10 smallest numbers are:**

8 29 30 48 52 53 58 60 120 125

כאשר קלט עד לנקודת בדיקה זו הוא:

**The Array is:**

921 500 497 260 634 817 128 939 58 191 667 52 986 588 352 495 277 60 422 636 752 429 345 356 837 762 171 711 323 593 822 669 160 48 53 952 530 482 172 392 944 120 924 429 241 846 631 620 583 458 849 339 962 209 735 458 125 343 443 412 633 630 826 597 776 683 977 206 1024 264 543 334 207 181 910 377 178 647 232 639 158 551 865 273 956 536 29 551 218 950 713 753 482 632 898 8 30 962 305 912

כפי שניתן לראות, לאחר שנסרקו 100 איברים ממערך הקלט, האיברים בעלי ערך מפתח קטן יותר מערך מקסימלי שהיה בעץ לרגע דגימה נכנסו במקום איבר מקסימלי זה. למשל, איברים בעלי מפתחות 8, 29, 30,125,נשמרו בעץ במקום איברים בעלי מפתח 128 , 160, 171,172. יחד עם זאת עם נתבון ב100 איברים שנדגמו עד כה, נראה ש-10 הכי קטנים מהם מופיעים בפלט.

עבור מערך הקלט בגודל 50 ו K=50, לאחר דגימת 100 ערכי קלט נקבל פלט ממוין הבא:

**The value of K is: 50**

**After 50 inputs:**

**The 50 smallest numbers are:**

48 52 53 58 60 120 128 160 171 172 191 241 260 277 323 345 352 356 392 422 429 429 458 482 495 497 500 530 583 588 593 620 631 634 636 667 669 711 752 762 817 822 837 846 921 924 939 944 952 986

כאשר קלט עד לנקודת בדיקה זו הוא:

**The Array is:**

921 500 497 260 634 817 128 939 58 191 667 52 986 588 352 495 277 60 422 636 752 429 345 356 837 762 171 711 323 593 822 669 160 48 53 952 530 482 172 392 944 120 924 429 241 846 631 620 583 458

כפי שניתן לראות כל 50 האיברים שנסרקו עד לנקודת הבדיקה(העומדת על כרבע מגודל הקלט) מופיעים בפלט בסדר ממוין. וזאת בהתאם לדרישות האלגוריתם.

עבור הקלט בגודל 150 ו K=50, לאחר דגימת 150 ערכי קלט נקבל פלט ממוין הבא:

**After 150 inputs:**

**The 50 smallest numbers are:**

7 8 8 14 17 26 29 30 32 42 48 52 53 56 58 60 63 103 120 125 128 158 160 164 168 171 172 178 181 186 191 206 207 209 218 232 237 241 241 260 264 273 275 277 283 305 305 321 323 323

כאשר קלט עד לנקודת בדיקה זו הוא:

**The Array is:**

921 500 497 260 634 817 128 939 58 191 667 52 986 588 352 495 277 60 422 636 752 429 345 356 837 762 171 711 323 593 822 669 160 48 53 952 530 482 172 392 944 120 924 429 241 846 631 620 583 458 849 339 962 209 735 458 125 343 443 412 633 630 826 597 776 683 977 206 1024 264 543 334 207 181 910 377 178 647 232 639 158 551 865 273 956 536 29 551 218 950 713 753 482 632 898 8 30 962 305 912 237 761 850 1008 672 999 321 168 63 7 355 241 331 509 947 17 1002 323 454 401 103 775 487 26 164 42 909 56 186 920 333 283 14 856 862 32 769 566 451 275 411 871 627 8 688 305 543 771 407 874

כפי שניתן לראות כל 50 האיברים שנסרקו עד לנקודת הבדיקה(העומדת על 3/4n\* מגודל הקלט) מופיעים בפלט בסדר ממוין. וזאת בהתאם לדרישות האלגוריתם. נשים לב לאיברים בעלי מפתח 8, 241, 323, ו-305. האיברים מופיעים בפלט פעמיים בדיוק כפי שהם מופיעים בקלט, וזאת כי ישנה הבחנה בין איברים לבין ערכים (או מפתחות) שלהם , כל שני איברים הם שונים (אחרת לא היו אלה שני איברים), במובן היסודי של הבחנה ביניהם; אבל יתכן שיש להם אותו ערך מפתח.

דוגמאות נוספות, שהן בעצם פלט של התוכנית, ניתן לראות בהמשך הקובץ ובקובץ הנקרא Appendix Output.

הפלט מלווה עם הדפסה של K אלמנטים הקטנים ביותר מהקלט ב 3-ת נקודות הבדיקה, והדפסה של K אלמנטים קטנים ביותר לאחר קבלת כל הקלט והדפסה של הקלט עצמו למתרות ייחוס ובדיקה.

**נספח-תוצאות קלט/פלט של האלגוריתם**

**OutPut file of 3 different arrays of size 200/400/800 for K equal to 10/50/100**

**InPut/OutPut for array of size 200**

**The value of K is: 10**

**After 50 inputs:**

**The 10 smallest numbers are:**

8 68 74 107 123 132 169 199 213 228

**After 100 inputs:**

**The 10 smallest numbers are:**

4 6 8 38 65 66 68 74 88 95

**After 150 inputs:**

**The 10 smallest numbers are:**

1 4 6 8 16 20 38 44 65 66

**After 200 inputs:**

**The 10 smallest numbers are:**

1 2 4 6 8 16 20 38 44 65

**The Input Array is:**

199 1014 902 449 856 240 213 132 826 682 494 632 413 74 870 306 637 8 784 708 542 775 888 169 906 68 449 228 275 913 123 898 878 988 820 284 1021 882 496 107 644 389 283 419 706 488 571 542 633 707 834 415 180 6 587 141 918 327 397 941 636 287 848 525 726 65 4 317 771 776 214 642 848 456 956 311 575 742 618 863 634 372 95 336 515 38 307 88 956 601 788 607 450 66 676 452 236 898 145 304 859 759 662 622 545 780 277 547 989 917 20 992 118 271 531 777 95 258 280 235 44 107 587 923 984 803 630 869 959 177 547 502 16 322 581 763 626 304 747 376 158 538 1 1011 452 621 241 868 1024 818 693 465 615 2 267 447 977 545 605 696 566 564 876 430 539 865 734 362 422 821 648 982 714 871 959 215 66 358 443 524 338 897 251 274 174 144 141 713 882 319 550 659 440 347 77 953 816 1023 546 437

**The value of K is: 50**

**After 50 inputs:**

**The 50 smallest numbers are:**

8 68 74 107 123 132 169 199 213 228 240 275 283 284 306 389 413 419 449 449 488 494 496 542 542 571 632 633 637 644 682 706 707 708 775 784 820 826 856 870 878 882 888 898 902 906 913 988 1014 1021

**After 100 inputs:**

**The 50 smallest numbers are:**

4 6 8 38 65 66 68 74 88 95 107 123 132 141 145 169 180 199 213 214 228 236 240 275 283 284 287 304 306 307 311 317 327 336 372 389 397 413 415 419 449 449 450 452 456 488 494 496 515 525

**After 150 inputs:**

**The 50 smallest numbers are:**

1 4 6 8 16 20 38 44 65 66 68 74 88 95 95 107 107 118 123 132 141 145 158 169 177 180 199 213 214 228 235 236 240 241 258 271 275 277 280 283 284 287 304 304 306 307 311 317 322 327

**After 200 inputs:**

**The 50 smallest numbers are:**

1 2 4 6 8 16 20 38 44 65 66 66 68 74 77 88 95 95 107 107 118 123 132 141 141 144 145 158 169 174 177 180 199 213 214 215 228 235 236 240 241 251 258 267 271 274 275 277 280 283

**The Input Array is:**

199 1014 902 449 856 240 213 132 826 682 494 632 413 74 870 306 637 8 784 708 542 775 888 169 906 68 449 228 275 913 123 898 878 988 820 284 1021 882 496 107 644 389 283 419 706 488 571 542 633 707 834 415 180 6 587 141 918 327 397 941 636 287 848 525 726 65 4 317 771 776 214 642 848 456 956 311 575 742 618 863 634 372 95 336 515 38 307 88 956 601 788 607 450 66 676 452 236 898 145 304 859 759 662 622 545 780 277 547 989 917 20 992 118 271 531 777 95 258 280 235 44 107 587 923 984 803 630 869 959 177 547 502 16 322 581 763 626 304 747 376 158 538 1 1011 452 621 241 868 1024 818 693 465 615 2 267 447 977 545 605 696 566 564 876 430 539 865 734 362 422 821 648 982 714 871 959 215 66 358 443 524 338 897 251 274 174 144 141 713 882 319 550 659 440 347 77 953 816 1023 546 437

**The value of K is: 100**

**After 50 inputs:**

**The 100 smallest numbers are:**

8 68 74 107 123 132 169 199 213 228 240 275 283 284 306 389 413 419 449 449 488 494 496 542 542 571 632 633 637 644 682 706 707 708 775 784 820 826 856 870 878 882 888 898 902 906 913 988 1014 1021

**After 100 inputs:**

**The 100 smallest numbers are:**

4 6 8 38 65 66 68 74 88 95 107 123 132 141 145 169 180 199 213 214 228 236 240 275 283 284 287 304 306 307 311 317 327 336 372 389 397 413 415 419 449 449 450 452 456 488 494 496 515 525 542 542 571 575 587 601 607 618 632 633 634 636 637 642 644 676 682 706 707 708 726 742 771 775 776 784 788 820 826 834 848 848 856 863 870 878 882 888 898 898 902 906 913 918 941 956 956 988 1014 1021

**After 150 inputs:**

**The 100 smallest numbers are:**

1 4 6 8 16 20 38 44 65 66 68 74 88 95 95 107 107 118 123 132 141 145 158 169 177 180 199 213 214 228 235 236 240 241 258 271 275 277 280 283 284 287 304 304 306 307 311 317 322 327 336 372 376 389 397 413 415 419 449 449 450 452 452 456 488 494 496 502 515 525 531 538 542 542 545 547 547 571 575 581 587 587 601 607 618 621 622 626 630 632 633 634 636 637 642 644 662 676 682 706

**After 200 inputs:**

**The 100 smallest numbers are:**

1 2 4 6 8 16 20 38 44 65 66 66 68 74 77 88 95 95 107 107 118 123 132 141 141 144 145 158 169 174 177 180 199 213 214 215 228 235 236 240 241 251 258 267 271 274 275 277 280 283 284 287 304 304 306 307 311 317 319 322 327 336 338 347 358 362 372 376 389 397 413 415 419 422 430 437 440 443 447 449 449 450 452 452 456 465 488 494 496 502 515 524 525 531 538 539 542 542 545 545

**The Input Array is:**

199 1014 902 449 856 240 213 132 826 682 494 632 413 74 870 306 637 8 784 708 542 775 888 169 906 68 449 228 275 913 123 898 878 988 820 284 1021 882 496 107 644 389 283 419 706 488 571 542 633 707 834 415 180 6 587 141 918 327 397 941 636 287 848 525 726 65 4 317 771 776 214 642 848 456 956 311 575 742 618 863 634 372 95 336 515 38 307 88 956 601 788 607 450 66 676 452 236 898 145 304 859 759 662 622 545 780 277 547 989 917 20 992 118 271 531 777 95 258 280 235 44 107 587 923 984 803 630 869 959 177 547 502 16 322 581 763 626 304 747 376 158 538 1 1011 452 621 241 868 1024 818 693 465 615 2 267 447 977 545 605 696 566 564 876 430 539 865 734 362 422 821 648 982 714 871 959 215 66 358 443 524 338 897 251 274 174 144 141 713 882 319 550 659 440 347 77 953 816 1023 546 437

**InPut/OutPut for array of size 400**

**The value of K is: 10**

**After 100 inputs:**

**The 10 smallest numbers are:**

7 23 72 86 93 95 99 113 117 123

**After 200 inputs:**

**The 10 smallest numbers are:**

7 18 22 23 24 24 31 40 55 60

**After 300 inputs:**

**The 10 smallest numbers are:**

7 9 10 18 22 23 24 24 31 40

**After 400 inputs:**

**The 10 smallest numbers are:**

7 9 9 10 18 22 23 24 24 31

**The Input Array is:**

761 788 699 470 774 308 705 319 145 234 414 612 72 291 117 1008 630 202 1014 323 192 680 884 491 229 763 658 486 403 428 123 992 113 662 729 366 607 248 131 735 315 23 888 307 170 246 930 188 467 7 972 555 149 542 99 469 835 259 951 667 230 669 474 567 208 307 700 95 349 993 939 244 750 86 532 840 872 434 93 407 496 146 638 991 558 379 811 148 497 283 934 1022 1020 353 922 160 644 739 969 923 22 977 551 968 422 114 876 297 235 298 572 60 635 777 484 513 955 548 698 418 342 55 125 31 936 665 866 226 921 1021 748 943 828 336 595 324 738 175 237 952 103 639 494 716 24 690 448 610 1014 902 94 692 980 820 840 541 657 948 771 1001 680 526 921 557 561 654 275 625 210 1001 182 479 40 347 416 406 467 727 828 750 173 653 607 459 375 112 455 85 512 680 350 24 202 433 979 18 533 850 251 517 651 422 985 822 744 557 602 478 911 282 367 145 599 543 929 53 167 609 302 900 945 681 60 136 136 362 294 309 474 508 619 1004 309 308 412 940 539 861 613 425 374 214 732 802 162 144 75 669 986 818 485 758 167 482 827 344 461 380 683 167 848 376 180 463 576 446 952 51 327 903 167 129 112 880 1011 587 9 547 864 525 68 343 75 430 251 48 932 245 725 199 10 548 318 57 54 158 655 874 928 103 588 183 263 326 907 437 660 882 95 123 355 509 392 299 626 139 172 728 340 609 545 668 377 121 619 51 386 794 689 366 187 311 700 156 462 239 628 561 651 164 101 794 1019 857 615 902 744 374 370 325 151 123 356 407 190 235 435 979 378 349 9 298 938 142 553 454 518 599 229 136 791 123 600 215 655 140 631 343 113 903 398 698 270 588 377 891 816 933 794 1015 628 354 774 576 646 509 376 478 221 775

**The value of K is: 50**

**After 100 inputs:**

**The 50 smallest numbers are:**

7 23 72 86 93 95 99 113 117 123 131 145 146 148 149 160 170 188 192 202 208 229 230 234 244 246 248 259 283 291 307 307 308 315 319 323 349 353 366 379 403 407 414 428 434 467 469 470 474 486

**After 200 inputs:**

**The 50 smallest numbers are:**

7 18 22 23 24 24 31 40 55 60 72 85 86 93 94 95 99 103 112 113 114 117 123 125 131 145 146 148 149 160 170 173 175 182 188 192 202 202 208 210 226 229 230 234 235 237 244 246 248 251

**After 300 inputs:**

**The 50 smallest numbers are:**

7 9 10 18 22 23 24 24 31 40 48 51 53 54 55 57 60 60 68 72 75 75 85 86 93 94 95 99 103 103 112 112 113 114 117 123 125 129 131 136 136 144 145 145 146 148 149 158 160 162

**After 400 inputs:**

**The 50 smallest numbers are:**

7 9 9 10 18 22 23 24 24 31 40 48 51 51 53 54 55 57 60 60 68 72 75 75 85 86 93 94 95 95 99 101 103 103 112 112 113 113 114 117 121 123 123 123 123 125 129 131 136 136

**The Input Array is:**

761 788 699 470 774 308 705 319 145 234 414 612 72 291 117 1008 630 202 1014 323 192 680 884 491 229 763 658 486 403 428 123 992 113 662 729 366 607 248 131 735 315 23 888 307 170 246 930 188 467 7 972 555 149 542 99 469 835 259 951 667 230 669 474 567 208 307 700 95 349 993 939 244 750 86 532 840 872 434 93 407 496 146 638 991 558 379 811 148 497 283 934 1022 1020 353 922 160 644 739 969 923 22 977 551 968 422 114 876 297 235 298 572 60 635 777 484 513 955 548 698 418 342 55 125 31 936 665 866 226 921 1021 748 943 828 336 595 324 738 175 237 952 103 639 494 716 24 690 448 610 1014 902 94 692 980 820 840 541 657 948 771 1001 680 526 921 557 561 654 275 625 210 1001 182 479 40 347 416 406 467 727 828 750 173 653 607 459 375 112 455 85 512 680 350 24 202 433 979 18 533 850 251 517 651 422 985 822 744 557 602 478 911 282 367 145 599 543 929 53 167 609 302 900 945 681 60 136 136 362 294 309 474 508 619 1004 309 308 412 940 539 861 613 425 374 214 732 802 162 144 75 669 986 818 485 758 167 482 827 344 461 380 683 167 848 376 180 463 576 446 952 51 327 903 167 129 112 880 1011 587 9 547 864 525 68 343 75 430 251 48 932 245 725 199 10 548 318 57 54 158 655 874 928 103 588 183 263 326 907 437 660 882 95 123 355 509 392 299 626 139 172 728 340 609 545 668 377 121 619 51 386 794 689 366 187 311 700 156 462 239 628 561 651 164 101 794 1019 857 615 902 744 374 370 325 151 123 356 407 190 235 435 979 378 349 9 298 938 142 553 454 518 599 229 136 791 123 600 215 655 140 631 343 113 903 398 698 270 588 377 891 816 933 794 1015 628 354 774 576 646 509 376 478 221 775

**The value of K is: 100**

**After 100 inputs:**

**The 100 smallest numbers are:**

7 23 72 86 93 95 99 113 117 123 131 145 146 148 149 160 170 188 192 202 208 229 230 234 244 246 248 259 283 291 307 307 308 315 319 323 349 353 366 379 403 407 414 428 434 467 469 470 474 486 491 496 497 532 542 555 558 567 607 612 630 638 644 658 662 667 669 680 699 700 705 729 735 739 750 761 763 774 788 811 835 840 872 884 888 922 923 930 934 939 951 969 972 991 992 993 1008 1014 1020 1022

**After 200 inputs:**

**The 100 smallest numbers are:**

7 18 22 23 24 24 31 40 55 60 72 85 86 93 94 95 99 103 112 113 114 117 123 125 131 145 146 148 149 160 170 173 175 182 188 192 202 202 208 210 226 229 230 234 235 237 244 246 248 251 259 275 283 291 297 298 307 307 308 315 319 323 324 336 342 347 349 350 353 366 375 379 403 406 407 414 416 418 422 428 433 434 448 455 459 467 467 469 470 474 479 484 486 491 494 496 497 512 513 517

**After 300 inputs:**

**The 100 smallest numbers are:**

7 9 10 18 22 23 24 24 31 40 48 51 53 54 55 57 60 60 68 72 75 75 85 86 93 94 95 99 103 103 112 112 113 114 117 123 125 129 131 136 136 144 145 145 146 148 149 158 160 162 167 167 167 167 170 173 175 180 182 188 192 199 202 202 208 210 214 226 229 230 234 235 237 244 245 246 248 251 251 259 275 282 283 291 294 297 298 302 307 307 308 308 309 309 315 318 319 323 324 327

**After 400 inputs:**

**The 100 smallest numbers are:**

7 9 9 10 18 22 23 24 24 31 40 48 51 51 53 54 55 57 60 60 68 72 75 75 85 86 93 94 95 95 99 101 103 103 112 112 113 113 114 117 121 123 123 123 123 125 129 131 136 136 136 139 140 142 144 145 145 146 148 149 151 156 158 160 162 164 167 167 167 167 170 172 173 175 180 182 183 187 188 190 192 199 202 202 208 210 214 215 221 226 229 229 230 234 235 235 237 239 244 245

**The Input Array is:**

761 788 699 470 774 308 705 319 145 234 414 612 72 291 117 1008 630 202 1014 323 192 680 884 491 229 763 658 486 403 428 123 992 113 662 729 366 607 248 131 735 315 23 888 307 170 246 930 188 467 7 972 555 149 542 99 469 835 259 951 667 230 669 474 567 208 307 700 95 349 993 939 244 750 86 532 840 872 434 93 407 496 146 638 991 558 379 811 148 497 283 934 1022 1020 353 922 160 644 739 969 923 22 977 551 968 422 114 876 297 235 298 572 60 635 777 484 513 955 548 698 418 342 55 125 31 936 665 866 226 921 1021 748 943 828 336 595 324 738 175 237 952 103 639 494 716 24 690 448 610 1014 902 94 692 980 820 840 541 657 948 771 1001 680 526 921 557 561 654 275 625 210 1001 182 479 40 347 416 406 467 727 828 750 173 653 607 459 375 112 455 85 512 680 350 24 202 433 979 18 533 850 251 517 651 422 985 822 744 557 602 478 911 282 367 145 599 543 929 53 167 609 302 900 945 681 60 136 136 362 294 309 474 508 619 1004 309 308 412 940 539 861 613 425 374 214 732 802 162 144 75 669 986 818 485 758 167 482 827 344 461 380 683 167 848 376 180 463 576 446 952 51 327 903 167 129 112 880 1011 587 9 547 864 525 68 343 75 430 251 48 932 245 725 199 10 548 318 57 54 158 655 874 928 103 588 183 263 326 907 437 660 882 95 123 355 509 392 299 626 139 172 728 340 609 545 668 377 121 619 51 386 794 689 366 187 311 700 156 462 239 628 561 651 164 101 794 1019 857 615 902 744 374 370 325 151 123 356 407 190 235 435 979 378 349 9 298 938 142 553 454 518 599 229 136 791 123 600 215 655 140 631 343 113 903 398 698 270 588 377 891 816 933 794 1015 628 354 774 576 646 509 376 478 221 775

**InPut/OutPut for array of size 800**

**The value of K is: 10**

**After 200 inputs:**

**The 10 smallest numbers are:**

6 6 9 15 20 25 25 33 34 41

**After 400 inputs:**

**The 10 smallest numbers are:**

1 4 6 6 9 13 15 15 20 23

**After 600 inputs:**

**The 10 smallest numbers are:**

1 4 6 6 9 9 13 15 15 20

**After 800 inputs:**

**The 10 smallest numbers are:**

1 4 6 6 6 9 9 13 15 15

**The Input Array is:**

786 466 361 779 388 598 1005 644 203 59 715 48 924 274 396 79 847 520 184 283 470 746 602 145 593 945 546 98 815 221 517 252 803 493 34 965 209 388 227 707 942 25 111 360 866 117 250 693 478 213 977 120 873 89 459 581 768 497 76 147 201 327 788 368 924 478 983 101 602 526 999 608 332 443 338 207 930 15 54 181 277 41 651 772 937 591 59 854 451 515 784 264 260 355 490 168 723 805 147 220 1018 732 438 534 359 612 676 986 236 976 244 210 460 212 138 143 474 813 279 675 281 401 245 638 820 373 9 694 864 25 84 50 222 135 755 842 6 106 916 254 365 799 418 545 695 264 520 217 694 164 482 664 127 6 576 425 919 756 767 327 397 316 655 630 20 212 714 532 298 209 783 468 451 149 581 665 597 561 983 504 901 939 344 956 162 164 823 469 157 201 451 618 457 923 179 934 33 812 657 73 375 483 642 583 715 692 603 595 479 976 95 969 555 380 913 53 144 417 863 148 323 130 787 90 23 34 931 915 909 534 616 388 1008 711 411 186 116 421 960 989 317 851 417 79 570 393 798 85 998 62 445 611 94 141 221 581 128 1015 575 720 630 433 729 47 156 30 775 817 396 491 647 378 1015 237 58 294 769 122 812 31 520 480 538 88 238 883 151 537 132 464 222 152 290 809 894 906 67 408 570 379 154 34 483 881 800 369 863 482 670 33 678 467 585 554 833 711 879 13 166 838 393 83 470 439 909 309 668 695 276 143 552 92 419 432 517 851 80 298 484 897 530 117 86 375 291 531 577 237 40 706 702 656 81 358 759 115 510 395 454 193 94 928 267 434 261 649 763 68 396 947 54 206 590 396 1 350 613 4 687 406 641 955 834 721 357 654 15 376 660 862 896 422 317 836 290 421 835 988 147 71 575 209 868 972 580 658 144 947 101 235 998 203 332 544 419 708 650 584 617 443 987 723 478 96 76 871 627 200 471 981 829 644 293 589 280 32 507 453 811 257 47 603 838 630 31 78 454 975 305 607 338 361 90 380 548 492 87 517 396 839 261 595 488 658 830 714 159 632 671 361 860 955 698 413 891 527 414 275 608 461 487 838 918 974 803 977 364 342 9 703 836 271 678 671 234 190 962 419 229 246 912 455 50 198 789 977 182 835 720 483 92 978 199 115 513 58 362 937 575 194 161 887 377 759 514 552 473 856 268 958 888 151 117 34 605 261 408 769 500 925 879 533 822 507 748 436 740 1010 269 944 830 880 417 487 214 232 153 59 113 250 656 361 137 925 77 688 851 989 26 61 830 301 822 795 609 48 223 397 657 273 46 998 703 203 381 569 913 263 1016 699 117 976 971 306 1005 249 381 405 370 703 796 690 232 568 56 439 934 499 523 141 223 630 446 786 876 112 848 678 301 990 137 987 139 482 49 960 799 178 743 221 284 437 1022 966 979 472 555 59 646 806 299 425 940 172 784 319 489 822 395 6 825 388 356 215 549 605 34 173 62 336 501 879 732 229 45 46 686 428 702 445 153 466 448 916 603 977 618 819 881 310 420 881 790 968 290 430 604 987 730 92 528 580 428 781 647 800 342 520 56 124 742 592 752 246 636 793 597 642 663 744 378 217 204 210 176 345 938 471 977 943 350 724 261 847 704 329 859 358 664 1014 639 486 305 64 120 73 183 627 141 449 885 263 595 731 411 646 583 492 261 512 403 553 628 923 306 239 160 384 290 882 690 306 803 772 279 585 343 264 221 422 1024 481 906 862 712 855 708 495 299 875 302 706 763 997 911 651 346 454 906 977 591 323 822 686 150 24 842 720 849 959

**The value of K is: 50**

**After 200 inputs:**

**The 50 smallest numbers are:**

6 6 9 15 20 25 25 33 34 41 48 50 54 59 59 73 76 79 84 89 98 101 106 111 117 120 127 135 138 143 145 147 147 149 157 162 164 164 168 179 181 184 201 201 203 207 209 209 210 212

**After 400 inputs:**

**The 50 smallest numbers are:**

1 4 6 6 9 13 15 15 20 23 25 25 30 31 33 33 34 34 34 40 41 47 48 50 53 54 54 58 59 59 62 67 68 71 73 76 79 79 80 81 83 84 85 86 88 89 90 92 94 94

**After 600 inputs:**

**The 50 smallest numbers are:**

1 4 6 6 9 9 13 15 15 20 23 25 25 26 30 31 31 32 33 33 34 34 34 34 40 41 46 47 47 48 48 50 50 53 54 54 58 58 59 59 59 61 62 67 68 71 73 76 76 77

**After 800 inputs:**

**The 50 smallest numbers are:**

1 4 6 6 6 9 9 13 15 15 20 23 24 25 25 26 30 31 31 32 33 33 34 34 34 34 34 40 41 45 46 46 47 47 48 48 49 50 50 53 54 54 56 56 58 58 59 59 59 59

**The Input Array is:**

786 466 361 779 388 598 1005 644 203 59 715 48 924 274 396 79 847 520 184 283 470 746 602 145 593 945 546 98 815 221 517 252 803 493 34 965 209 388 227 707 942 25 111 360 866 117 250 693 478 213 977 120 873 89 459 581 768 497 76 147 201 327 788 368 924 478 983 101 602 526 999 608 332 443 338 207 930 15 54 181 277 41 651 772 937 591 59 854 451 515 784 264 260 355 490 168 723 805 147 220 1018 732 438 534 359 612 676 986 236 976 244 210 460 212 138 143 474 813 279 675 281 401 245 638 820 373 9 694 864 25 84 50 222 135 755 842 6 106 916 254 365 799 418 545 695 264 520 217 694 164 482 664 127 6 576 425 919 756 767 327 397 316 655 630 20 212 714 532 298 209 783 468 451 149 581 665 597 561 983 504 901 939 344 956 162 164 823 469 157 201 451 618 457 923 179 934 33 812 657 73 375 483 642 583 715 692 603 595 479 976 95 969 555 380 913 53 144 417 863 148 323 130 787 90 23 34 931 915 909 534 616 388 1008 711 411 186 116 421 960 989 317 851 417 79 570 393 798 85 998 62 445 611 94 141 221 581 128 1015 575 720 630 433 729 47 156 30 775 817 396 491 647 378 1015 237 58 294 769 122 812 31 520 480 538 88 238 883 151 537 132 464 222 152 290 809 894 906 67 408 570 379 154 34 483 881 800 369 863 482 670 33 678 467 585 554 833 711 879 13 166 838 393 83 470 439 909 309 668 695 276 143 552 92 419 432 517 851 80 298 484 897 530 117 86 375 291 531 577 237 40 706 702 656 81 358 759 115 510 395 454 193 94 928 267 434 261 649 763 68 396 947 54 206 590 396 1 350 613 4 687 406 641 955 834 721 357 654 15 376 660 862 896 422 317 836 290 421 835 988 147 71 575 209 868 972 580 658 144 947 101 235 998 203 332 544 419 708 650 584 617 443 987 723 478 96 76 871 627 200 471 981 829 644 293 589 280 32 507 453 811 257 47 603 838 630 31 78 454 975 305 607 338 361 90 380 548 492 87 517 396 839 261 595 488 658 830 714 159 632 671 361 860 955 698 413 891 527 414 275 608 461 487 838 918 974 803 977 364 342 9 703 836 271 678 671 234 190 962 419 229 246 912 455 50 198 789 977 182 835 720 483 92 978 199 115 513 58 362 937 575 194 161 887 377 759 514 552 473 856 268 958 888 151 117 34 605 261 408 769 500 925 879 533 822 507 748 436 740 1010 269 944 830 880 417 487 214 232 153 59 113 250 656 361 137 925 77 688 851 989 26 61 830 301 822 795 609 48 223 397 657 273 46 998 703 203 381 569 913 263 1016 699 117 976 971 306 1005 249 381 405 370 703 796 690 232 568 56 439 934 499 523 141 223 630 446 786 876 112 848 678 301 990 137 987 139 482 49 960 799 178 743 221 284 437 1022 966 979 472 555 59 646 806 299 425 940 172 784 319 489 822 395 6 825 388 356 215 549 605 34 173 62 336 501 879 732 229 45 46 686 428 702 445 153 466 448 916 603 977 618 819 881 310 420 881 790 968 290 430 604 987 730 92 528 580 428 781 647 800 342 520 56 124 742 592 752 246 636 793 597 642 663 744 378 217 204 210 176 345 938 471 977 943 350 724 261 847 704 329 859 358 664 1014 639 486 305 64 120 73 183 627 141 449 885 263 595 731 411 646 583 492 261 512 403 553 628 923 306 239 160 384 290 882 690 306 803 772 279 585 343 264 221 422 1024 481 906 862 712 855 708 495 299 875 302 706 763 997 911 651 346 454 906 977 591 323 822 686 150 24 842 720 849 959

**The value of K is: 100**

**After 200 inputs:**

**The 100 smallest numbers are:**

6 6 9 15 20 25 25 33 34 41 48 50 54 59 59 73 76 79 84 89 98 101 106 111 117 120 127 135 138 143 145 147 147 149 157 162 164 164 168 179 181 184 201 201 203 207 209 209 210 212 212 213 217 220 221 222 227 236 244 245 250 252 254 260 264 264 274 277 279 281 283 298 316 327 327 332 338 344 355 359 360 361 365 368 373 388 388 396 397 401 418 425 438 443 451 451 451 457 459 460

**After 400 inputs:**

**The 100 smallest numbers are:**

1 4 6 6 9 13 15 15 20 23 25 25 30 31 33 33 34 34 34 40 41 47 48 50 53 54 54 58 59 59 62 67 68 71 73 76 79 79 80 81 83 84 85 86 88 89 90 92 94 94 95 98 101 106 111 115 116 117 117 120 122 127 128 130 132 135 138 141 143 143 144 145 147 147 147 148 149 151 152 154 156 157 162 164 164 166 168 179 181 184 186 193 201 201 203 206 207 209 209 210

**After 600 inputs:**

**The 100 smallest numbers are:**

1 4 6 6 9 9 13 15 15 20 23 25 25 26 30 31 31 32 33 33 34 34 34 34 40 41 46 47 47 48 48 50 50 53 54 54 58 58 59 59 59 61 62 67 68 71 73 76 76 77 78 79 79 80 81 83 84 85 86 87 88 89 90 90 92 92 94 94 95 96 98 101 101 106 111 113 115 115 116 117 117 117 117 120 122 127 128 130 132 135 137 138 141 143 143 144 144 145 147 147

**After 800 inputs:**

**The 100 smallest numbers are:**

1 4 6 6 6 9 9 13 15 15 20 23 24 25 25 26 30 31 31 32 33 33 34 34 34 34 34 40 41 45 46 46 47 47 48 48 49 50 50 53 54 54 56 56 58 58 59 59 59 59 61 62 62 64 67 68 71 73 73 76 76 77 78 79 79 80 81 83 84 85 86 87 88 89 90 90 92 92 92 94 94 95 96 98 101 101 106 111 112 113 115 115 116 117 117 117 117 120 120 122

**The Input Array is:**

786 466 361 779 388 598 1005 644 203 59 715 48 924 274 396 79 847 520 184 283 470 746 602 145 593 945 546 98 815 221 517 252 803 493 34 965 209 388 227 707 942 25 111 360 866 117 250 693 478 213 977 120 873 89 459 581 768 497 76 147 201 327 788 368 924 478 983 101 602 526 999 608 332 443 338 207 930 15 54 181 277 41 651 772 937 591 59 854 451 515 784 264 260 355 490 168 723 805 147 220 1018 732 438 534 359 612 676 986 236 976 244 210 460 212 138 143 474 813 279 675 281 401 245 638 820 373 9 694 864 25 84 50 222 135 755 842 6 106 916 254 365 799 418 545 695 264 520 217 694 164 482 664 127 6 576 425 919 756 767 327 397 316 655 630 20 212 714 532 298 209 783 468 451 149 581 665 597 561 983 504 901 939 344 956 162 164 823 469 157 201 451 618 457 923 179 934 33 812 657 73 375 483 642 583 715 692 603 595 479 976 95 969 555 380 913 53 144 417 863 148 323 130 787 90 23 34 931 915 909 534 616 388 1008 711 411 186 116 421 960 989 317 851 417 79 570 393 798 85 998 62 445 611 94 141 221 581 128 1015 575 720 630 433 729 47 156 30 775 817 396 491 647 378 1015 237 58 294 769 122 812 31 520 480 538 88 238 883 151 537 132 464 222 152 290 809 894 906 67 408 570 379 154 34 483 881 800 369 863 482 670 33 678 467 585 554 833 711 879 13 166 838 393 83 470 439 909 309 668 695 276 143 552 92 419 432 517 851 80 298 484 897 530 117 86 375 291 531 577 237 40 706 702 656 81 358 759 115 510 395 454 193 94 928 267 434 261 649 763 68 396 947 54 206 590 396 1 350 613 4 687 406 641 955 834 721 357 654 15 376 660 862 896 422 317 836 290 421 835 988 147 71 575 209 868 972 580 658 144 947 101 235 998 203 332 544 419 708 650 584 617 443 987 723 478 96 76 871 627 200 471 981 829 644 293 589 280 32 507 453 811 257 47 603 838 630 31 78 454 975 305 607 338 361 90 380 548 492 87 517 396 839 261 595 488 658 830 714 159 632 671 361 860 955 698 413 891 527 414 275 608 461 487 838 918 974 803 977 364 342 9 703 836 271 678 671 234 190 962 419 229 246 912 455 50 198 789 977 182 835 720 483 92 978 199 115 513 58 362 937 575 194 161 887 377 759 514 552 473 856 268 958 888 151 117 34 605 261 408 769 500 925 879 533 822 507 748 436 740 1010 269 944 830 880 417 487 214 232 153 59 113 250 656 361 137 925 77 688 851 989 26 61 830 301 822 795 609 48 223 397 657 273 46 998 703 203 381 569 913 263 1016 699 117 976 971 306 1005 249 381 405 370 703 796 690 232 568 56 439 934 499 523 141 223 630 446 786 876 112 848 678 301 990 137 987 139 482 49 960 799 178 743 221 284 437 1022 966 979 472 555 59 646 806 299 425 940 172 784 319 489 822 395 6 825 388 356 215 549 605 34 173 62 336 501 879 732 229 45 46 686 428 702 445 153 466 448 916 603 977 618 819 881 310 420 881 790 968 290 430 604 987 730 92 528 580 428 781 647 800 342 520 56 124 742 592 752 246 636 793 597 642 663 744 378 217 204 210 176 345 938 471 977 943 350 724 261 847 704 329 859 358 664 1014 639 486 305 64 120 73 183 627 141 449 885 263 595 731 411 646 583 492 261 512 403 553 628 923 306 239 160 384 290 882 690 306 803 772 279 585 343 264 221 422 1024 481 906 862 712 855 708 495 299 875 302 706 763 997 911 651 346 454 906 977 591 323 822 686 150 24 842 720 849 959